Χρωματισμός γραφημάτων

12-12-16

n-χρώματα

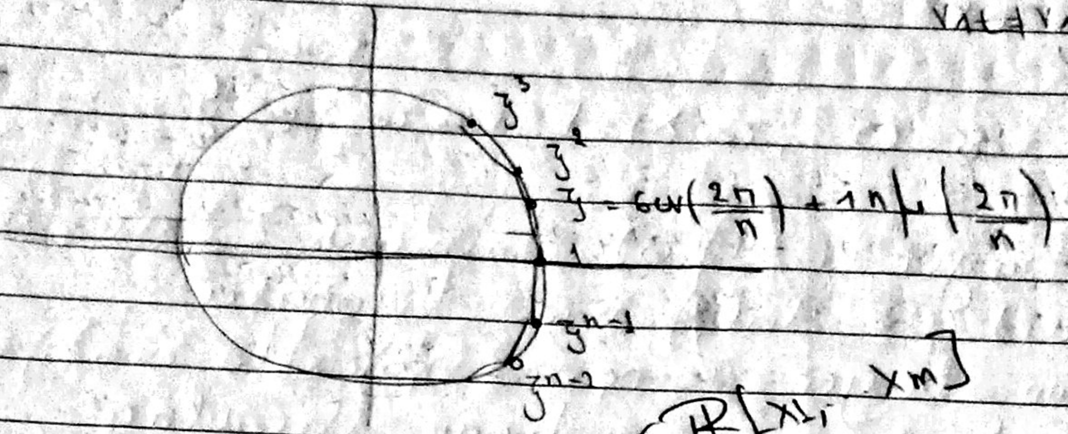
οι n-οστές ρίζες της μονάδας

$$G = (V, E)$$

$V = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$

$E = \{\{v_{i1}, v_{j1}\}, \{v_{i2}, v_{j2}\}, \dots, \{v_{is}, v_{js}\}, \; i_t, j_t \in \{1, \dots m\}\}$

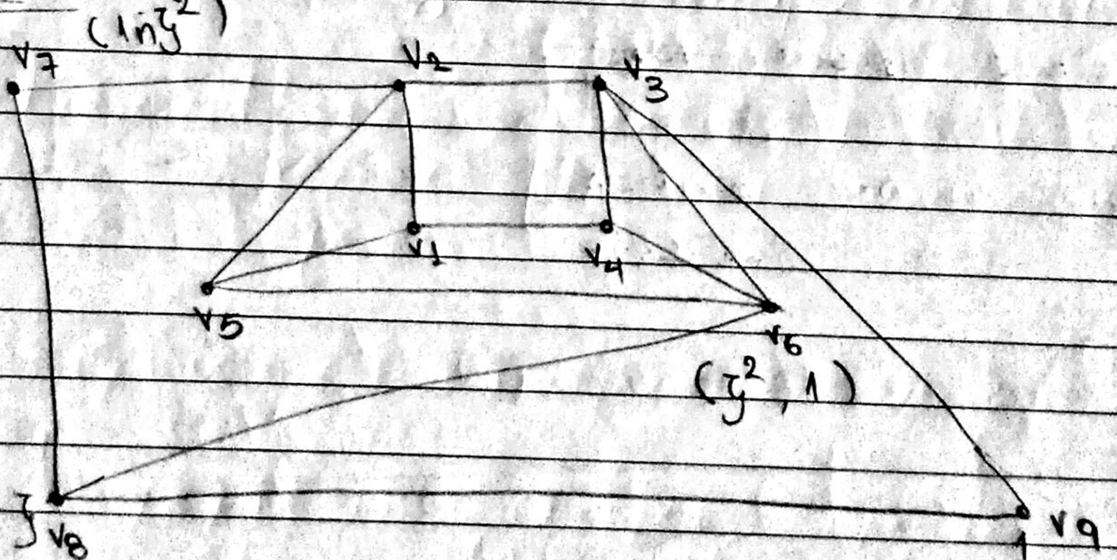
$v_{it} \neq v_{jt}$



$$I = \langle x_i^n - 1 \mid i \in \{1, \dots n\} \rangle + \langle x_i^{n-1} + x_i^{n-2}x_j + x_i^{n-3}x_j^2 + \dots + x_i x_j^{n-2} + x_j^{n-1} \mid (v_i, v_j) \in E \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, \dots x_m]$$

$$V_{\mathbb{C}}(I) \subset \mathbb{C}^m$$

Παράδειγμα



Χρωματίζεται με 3 χρώματα;

$$\left\{1, \; \zeta = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \; \zeta^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right\}$$

$I = \langle x_1^3 - 1, x_2^3 - 1, \ldots, x_9^3 - 1 \rangle + \langle x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 \mid \{i,j\} \in \{\{1,2\},$
$\{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,9\}, \{4,6\}, \{5,$
$\{6,8\}, \{7,8\}, \{8,9\}\}$

έχω $9 + 14 = 23$ στοιχεία

S-πολυώνυμα για όλα τα $\underline{23 \cdot 22} = 23 \cdot 11$ και για ένα S πολυώνυμο, το οποίο δεν βγαίνει θα έπρεπε να προσθέσω $+22$ S πολυώνυμα κάθε φορά

$x_3x_7 + x_3x_8 - x_7x_8 + x_3x_4 + x_9^2$

lex $x_1 > x_2 > \ldots > x_9$ $\qquad$ $x_5x_8 - x_3x_4 - x_9^2,$

Η ανάγωγη βάση Grobner του I είναι: $(x_4 - x_5)(x_4 + x_7 + x_8)$

$\{x_1 + x_5 - x_7 - x_8, x_2 + x_7 + x_8, x_3^2 + x_3x_9 + x_9^2, x_3x_4 + x_4x_5 - x_4x_7 + x_5x_9 - x_4x_8$
$(x_5 - x_9)(x_4x_7 + x_4x_8 + x_7x_8 + x_4x_9 + x_7x_9 + x_8x_9), (x_5 - x_7)(x_5 - x_8),$
$x_6 + x_7 + x_8, (x_7 - x_9)(x_7 + x_8 + x_9), \underline{x_8^2 + x_8x_9 + x_9^2}, \underline{x_9^3 - 1}\} \neq \{1\}$

άρα το γράφημα μου χρωματίζεται με 3-χρώματα.

Το x_9, αυθαίρετα, βάφεται με όποιο χρώμα θέλω.

$x_8^2 + x_8x_9 + x_9^2$, σημαίνει ότι το x_8 θα πάρει διαφορετικό χρώμα από το x_9, έχω δύο επιλογές ή ζ ή ζ^2 επιλέγω, αυθαίρετα το ζ.

$x_6 + x_7 + x_8 = 0$, είναι διαφορετικά

$(x_5 - x_7)(x_5 - x_8)$ θα πάρει το χρώμα του x_7 ή το χρώμα του x_8

Θέμα που έπεσε φέτος

Στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y,z,u,v]$ με μονωνυμική διάταξη την αντίστροφη βαθμωτή λεξικογραφική με $x>y>z>u>v$ δίνεται το ιδεώδες:

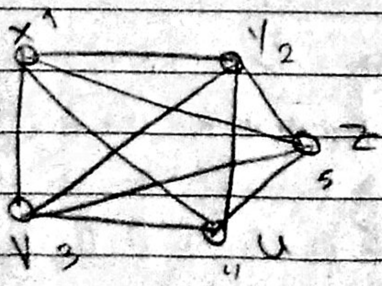
$I = \langle x^4-1,\ y^4-1,\ z^4-1,\ u^4-1,\ v^4-1,\ x^3+x^2y+xy^2+y^3,\ x^3+x^2z+xz^2+z^3,\ x^3+x^2u+xu^2+u^3,\ x^3+x^2v+xv^2+v^3,\ y^3+y^2z+yz^2+z^3,\ y^3+y^2u+yu^2+u^3,\ y^3+y^2v+yv^2+v^3,\ z^3+z^2u+zu^2+u^3,\ z^3+z^2v+zv^2+v^3,\ u^3+u^2v+uv^2+v^3 \}$. Με ποιο συγκεκριμένο πρόβλημα της Θεωρίας γραφημάτων συνδέεται το παρακάτω ιδεώδες και βρείτε την ανηγμένη βάση Grobner του I ως προς την degrevlex $x>y>z>u>v$.

Λύση

συγκεκριμένο: γράφημα + χρώμα

Χρωματισμός με 4-χρώματα

κορυφές $x^4-1,\ y^4-1,\ z^4-1,\ u^4-1,\ v^4-1$



{ έχει 5 κορυφές με 5 χρώματα. Δεν χρωματίζεται με λιγότερα χρώματα, γιατί το γράφημα είναι πλήρες.

Δεν χρωματίζεται με 4 χρώματα $\Rightarrow$ Η ανηγμένη βάση Grobner του I είναι $\{1\}$

□

SOS

Εφαρμογές

• $f \xrightarrow{G} N_G(f)$ — $K[x_1, \dots x_n]$ → μονωνυμική διάταξη, υπόλοιπο ← κανονική μορφή του f μόδιο G

G βάση Grobner ενός ιδεώδους I

το υπόλοιπο είναι σταθερό και δεν εξαρτάται από τη διαίρεση, το οποίο είναι άθροισμα κάποιων όρων.

$N_G(f) = c_1 M_1 + c_2 M_2 + \dots + c_t M_t$ $\quad c_i \neq 0$ συντελεστές (μη μηδενικοί αριθμοί από το k), M_i μονώνυμα

η $N_G(f) = 0$

$M_i \notin Lt(I) = <lm(g_1), lm(g_2), lm(g_s)>$, όπου $G = \{g_1, \dots g_s\}$

$f \in K[x_1, \dots x_n]$

$f \in I$;

G βάση Grobner

$f \xrightarrow{G} N_G(f)$ $\quad$ i) $N_G(f) \neq 0 \Leftrightarrow f \notin I$

ii) $N_G(f) = 0 \Leftrightarrow f \in I$

• I, J ιδεώδη $k[x_1, \dots x_n]$

Ισχύει $I = J$;

$I = <f_1, f_2, \dots f_s>$ $\quad J = <g_1, g_2, \dots g_t>$

Χρησιμοποιώ την ίδια διάταξη στα I, J.

Υπολογίζουμε μια ανηγμένη βάση Grobner για το I, την G, και μια ανηγμένη βάση Grobner για το J, την G'.

$I \xrightarrow[\text{Grobner}]{\text{ανηγ. βάση}} G$, $J \xrightarrow[\text{Grobner}]{\text{ανηγμένη βάση}} G'$

i) $G = G' \Longrightarrow I = J$

ii) $G \neq G' \longrightarrow I \neq J$

• $R = k[x_1, \dots x_n]$ $\quad$ I ιδεώδες του $k[x_1, \dots x_n]$

δακτύλιος πηλίκο $k[x_1, \dots x_n] / I$

στοιχεία: σύμπλοκα της μορφής $f + I$

$$(f+I)+(g+I)=f+g+I$$

$$(f+I)(g+I)=fg+I$$

Ένα σύμπλοκο δεν έχει μοναδικό τρόπο αναπαράστασης

$$f+I=g+I \Rightarrow f-g \in I$$

$$f+I=f+h+I \quad , h \in I$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}$

↳ όλα πολλαπλάσια του n

$I=n\mathbb{Z}$

$$f+I=N_G(f)+I$$

$f \xrightarrow{G} N_G(f)$ — G βάση Grobner του I ως προς τη μονωνυμική διάταξη

$f-N_G(f) \in I$

$(K[x_1,\dots x_n]/I \quad K,+,\cdot)$

K σώμα

$$(f+I)+(g+I)=(f+g+I$$

$$\lambda(f+I)=\lambda f+I$$

$$\lambda \in K$$

ουδέτερο στοιχείο: $0+I$

αντίθετος του f είναι το $-f$, $(-f+I)$

K-διανυσματικός χώρος

Θεώρημα. Έστω I ιδεώδες του $k[x_1, \dots x_n]$ εφοδιασμένου με μια μονωνυμική διάταξη $<$.
Το σύνολο $\mathcal{B} = \{M + I \mid M \notin Lt(I)\}$ αποτελεί βάση για τον k-διανυσματικό χώρο
$k[x_1, \dots x_n] / I$.

M μονώνυμο

Το σύνολο $\mathcal{B}$ μπορεί να είναι άπειρο

$f \in k[x_1, \dots x_n]$. Έστω G βάση Grobner του I, ως προς την διάταξη $<$.

$f \xrightarrow{G}_+ N_G(f)$ κανονική μορφή

$N_G(f) = 0 \ (= 0M_1 + 0M_2 + \dots + 0M_t)$

ή

$N_G(f) = c_1M_1 + c_2M_2 + \dots + c_tM_t$

$c_i \neq 0 \quad M_i \notin Lt(I)$

$$f + I = N_G(f) + I = c_1M_1 + \dots c_tM_t + I$$
$$= c_1(M_1 + I) + c_2(M_2 + I) + \dots + c_t(M_t + I)$$

Άρα, το $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $k[x_1, \dots x_n]/I$

Έστω, $\lambda_1(M_1 + I) + \lambda_2(M_2 + I) + \dots + \lambda_s(M_s + I) = 0 + I$

$(\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \dots + \lambda_sM_s) + I = 0 + I$

$\Rightarrow \lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \dots + \lambda_sM_s \in I$

G βάση Grobner $lm(g_i) \mid lm(h)$

i) $\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \dots + \lambda_sM_s \neq 0 \Rightarrow lm(h) \in Lt(I)$. Άτοπο

ii) $\lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \dots \lambda_sM_s = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$

Άρα, τα διανύσματα του $\mathcal{B}$ είναι ΓΑ. $\square$

Ασκήσεις

1) Βρείτε την διάσταση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{Q}[x,y]/I$, όπου $I = \langle \underbrace{x^2y - y + x}_{f_1}, \underbrace{xy^2 - x}_{f_2} \rangle$

deglex $y > x$ Είναι σωστά διατεταγμένα

Η ανηγμένη βάση Grobner του είναι

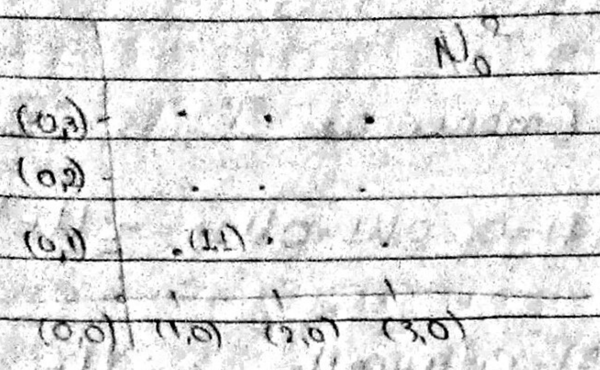
$g_1 = f_1 = x^2y - y + x$

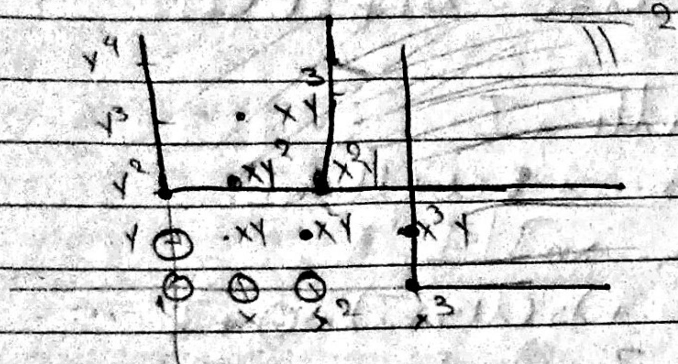
$g_2 = y^2 - xy - x^2$

$g_3 = x^3 + y - 2x$

$lt(I) = \langle x^2y, y^2, x^3 \rangle$

Βάση του $\mathbb{Q}[x,y]/I$ είναι το σύνολο $B = \{M + I \mid M \notin lt(I)\}$





$B = \{1+I,\ x+I,\ x^2+I,\ y+I,\ xy+I\}$

$\dim \mathbb{Q}[x,y]/I = 5$

<u>Παρατήρηση</u> 1) η βάση B εξαρτάται από τη διάταξη

2) η διάσταση δεν εξαρτάται από τη διάταξη

αφού δεν εξαρτάται από τη βάση Gorbner.

□

$f_1 = x^2y - y + x \qquad V(x^2y - y + x)$

$f_2 = xy^2 - x \qquad V(xy^2 - x)$